פתרון מבחן מועד א' במודלים חישוביים, סמסטר א' 2010

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצים: פרופ' נחום דרשוביץ וד"ר יוליה קמפה
מתרגלים: אורי להב ויהונתן ברנט
10/2/10

שאלה 1

תהא L שפה כלשהי.
נסמן ב-a את מספר מחלקות השקילות של היחס $\sim_L$.
נסמן ב-b את מספר מחלקות השקילות של היחס $\sim_{Reverse(L)}$.
(Reverse היא פעולה שלמדנו, $Reverse(L) = \{ w^R \in L \mid w \in L \}$)

א. בהכרח $a+b=\infty$.
ב. אם a סופי אז גם b סופי.
ג. תמיד $a=b$ (הניחו: $\infty = \infty$).
ד. תשובות ב' ו-ג' נכונות.

למדנו שאם L רגולרית אז Reverse(L) רגולרית, לכן ב' נכון. ג' לא נכון כי ייתכן שמספר המצבים ב-DFA השלם המינימאלי משתנה, קחו למשל את שפת כל המילים שהתו השלישי שלהן הוא 0.

שאלה 2

בעיית ההכרעה $2SAT_{XOR}$ היא הבעיה הבאה:

קלט: נוסחה המורכבת מקוניונקטים (ביניהם $\wedge$). בכל קוניונקט בדיוק שני ליטרלים שביניהם XOR.
שאלה: האם קיימת הצבה מספקת לנוסחה?

למשל: עבור הקלט $(x_1 \text{ XOR } x_2) \wedge (\neg x_1 \text{ XOR } \neg x_2)$ התשובה היא 'כן', הצבה מספקת תקבע $x_1=T$ ו - $x_2=F$.

$2SAT_{XOR}$ שייכת למחלקה (הנח ש- $P \neq NP$):

א. P
ב. $NP \setminus P$
ג. $coNP \setminus P$
ד. אף אחת מהנ"ל

ע"י רדוקציה פשוטה ל-2SAT שהיא ב-P; אפשר גם למצוא אלגוריתם פשוט לפתרון הבעיה בזמן פולינומיאלי.

שאלה 3

CH(x) היא פונקציה מקבוצת הקידודים של מ"ט המוגדרת כלהלן:

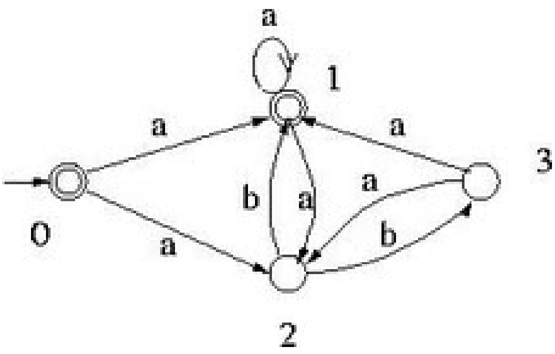
$$CH(<M>) = \begin{cases} \text{M ההיסטוריה החישובית של } \text{ על } \varepsilon & \text{אם M עוצרת על } \varepsilon \\ \varepsilon & \text{אחרת} \end{cases}$$

לאיזה מהמחלקות הבאות שייכת השפה $\{ <M, CH(<M>)> \mid M \text{ is a TM} \}$?

א. R
ב. $RE \setminus R$
ג. $coRE \setminus R$
ד. אף אחת מהתשובות א'-ג' אינה נכונה.

נשים לב ש-CH אינה חשיבה. אם היה ב-R אז הפונקציה CH הייתה חשיבה. לעומת זאת, ניתן להכריע למחצה את השפה המשלימה:
בהינתן קלט <x,y>
אם x לא מהווה קידוד של מ"ט נקבל.
אחרת, נסמן ב-M את המכונה המקודדת ב-x.
אם y מכיל היסטוריה חישובית של M על ε, נדחה.
אחרת, אם y אינו ε נקבל.
אחרת, נריץ את M על ε ונקבל אם M עצרה.

שאלה 4



להלן NFA.

מה מספר המצבים של ה-DFA השלם הקטן ביותר שמזהה את אותה השפה?

(DFA שלם הוא DFA עם פונקצית מעברים מלאה, כלומר יש חץ עבור כל אות מכל אחד מהמצבים)

א. 2
ב. 3
ג. 4
ד. 16

האוטומט מקבל את שפת כל המילים שאינן מתחילות ב-b ואינן מכילות שני b-ים רצופים. ניתן לבנות DFA שלם עם 3 מצבים לשפה זו. לשפה זו 3 מחלקות שקילות ולכן זה ה-DFA המינימלי.

שאלה 5

מה מהבאים **אינו** נכון?

א. $\{a^m b^{2n} \mid m>0 , n>0\}$ היא שפה רגולרית.
ב. כל תת קבוצה סופית של $\{ ww \mid w \in \{a,b\}^* \}$ היא רגולרית.
ג. אין תת קבוצה אינסופית של $\{ ww \mid w \in \{a,b\}^* \}$ שהיא רגולרית.
ד. אין תת קבוצה אינסופית של $\{ a^n b^n \mid n > 0 \}$ שהיא רגולרית.

ניתן לקחת חיתוך של שפה זו עם $\{a\}^*$, ונקבל תת קבוצה אינסופית רגולרית.

שאלה 6

יהי $c > 1$ מספר שלם. להלן 3 בעיות הכרעה:

קלט: מ"ט M.
שאלה: האם נכון שלכל קלט x, M לא עוברת את המקום ה- $c + |x|$ כאשר היא רצה על x?

קלט: מ"ט M.
שאלה: האם נכון שלכל קלט x, M לא עוברת את המקום ה- $\max\{ |x|-c ,1\}$ כאשר היא רצה על x?

קלט: מ"ט M.
שאלה: האם נכון שלכל קלט x, M לא עוברת את המקום ה- $\lceil (|x| + 1)/c \rceil$ כאשר היא רצה על x?

(ספירת המקומות בסרט מתחילה ב-1)

מספר בעיות ההכרעה הכריעות מתוך שלוש הבעיות הללו הוא:

א. 0
ב. 1
ג. 2
ד. 3

ראו תרגיל 5 סעיפים g,h.

<u>שאלה 7</u>

נגדיר פעולה על שפות: $MAX(L) = \{ w \in L \mid$ אין תחילית אמיתית ל-w ב- $L \}$

(תחילית אמיתית (proper prefix) של מילה w היא תחילית של w שאינה כל w)

<u>טענה 1:</u> מחלקת השפות הרגולריות סגורה תחת MAX.
<u>טענה 2:</u> מחלקת השפות חסרות ההקשר סגורה תחת MAX.

א. טענה 1 נכונה וטענה 2 לא נכונה.
ב. טענה 2 נכונה וטענה 1 לא נכונה.
ג. שתי הטענות נכונות.
ד. שתי הטענות אינן נכונות.

בהינתן DFA ל-L נוכל להוציא מקבוצת המצבים המקבלים את כל המצבים שניתן להגיע אליהם ממצב מקבל, וכך לקבל DFA ל-MAX(L). השפה $\{ a^n b^m c^k \mid n,m>0, k³n \text{ or } k³m \}$ היא חסרת הקשר, כאיחוד של שתי שפות חסרות הקשר. ממנה מתקבלת ע"י הפעולה MAX השפה $\{ a^n b^m c^k \mid n,m>0, k=min\{n,m\} \}$ שאינה חסרת הקשר (מראים ע"י למת הניפוח).

<u>שאלה 8</u>

להלן 3 טענות:

1. לכל $A,B \in P$ שאינן טריוויאליות מתקיים $A \leq_p B$.
2. לכל $A,B \in NP$ שאינן טריוויאליות מתקיים $A \leq_p B$.
3. לכל $A,B \in NPC$ שאינן טריוויאליות מתקיים $A \leq_p B$.

(תזכורת: שפה טריוויאלית היא השפה הריקה ($\varnothing$) או השפה המלאה (Σ^*))

א. שלוש הטענות נכונות.
ב. טענה אחת בדיוק נכונה.
ג. שתי טענות נכונות ואחת נכונה אם"ם P=NP.
ד. אף אחת מהתשובות אינה נכונה.

טענה 1 נכונה כי רדוקציית מיפוי פול' יכולה לפתור את A ולייצר פלט בהתאם. טענה 3 נכונה מהגדרת NPC. טענה 2 שקולה לשאלה P=NP (אם P=NP היא שקולה לטענה 1, אם P¹NP אז עבור B ב-P ו-A ב-NPC לא ייתכן שקיימת רדוקציה).

<u>שאלה 9</u>

תהא $f : N$ à N פונקציה **לא חשיבה וחסומה** (כלומר קיים $c \in N$ כך ש- $\forall n \; f(n) < c$).

נסמן $L = \{ (x, f(x)) \mid x \in N \}$ (הנח שהמספרים ניתנים בקידוד בינארי).

א. $L \in RE$
ב. $L \in coRE$
ג. יש פונקציה f כזו עבורה $L \in RE$ ויש פונקציה f כזו עבורה $L \notin RE$.
ד. אף אחת מהתשובות א'-ג' אינה נכונה.

אם L Î RE אז בהינתן x, נוכל להריץ במקביל במ"ט שמכריעה למחצה את L את כל הזוגות (x,0),...(x,c-1). אחד מהם בהכרח יקבל, וכך נוכל למצוא את f(x) בסתירה לכך ש-f לא חשיבה. אם L Î coRE אז בהינתן x, נוכל להריץ במקביל במ"ט שמכריעה למחצה את המשלים של L את כל הזוגות (x,0),...(x,c-1). כולם למעט אחד בהכרח יקבלו, וכך נוכל למצוא את f(x) בסתירה לכך ש-f לא חשיבה.

<u>שאלה 10</u>

נסמן $\Sigma = \{0,1\}$. מה מהבאים **אינו** נכון?

א. קיימת שפה רגולרית אינסופית שכל תת קבוצה שלה היא שפה רגולרית.
ב. קבוצת המחרוזות מעל Σ שבהם מספר המופעים של 0 הוא בדיוק פעמיים מספר המופעים של 1 הינה שפה חסרת הקשר.
ג. לכל שפה רגולרית L מעל Σ, השפה המורכבת מהמילים $u \in \Sigma^*$ שעבורן קיים $v \in \Sigma^*$ כך ש- $uv \in L$ היא גם שפה רגולרית.
ד. לכל שפה רגולרית L, שפת כל המילים ב-L שהן באורך אי זוגי היא גם שפה רגולרית.

ראינו שלכל שפה אינסופית יש תת שפה לא כריעה.

שאלה 11

3DFA היא מכונת טיורינג בעלת סרט קלט **לקריאה בלבד** ו-3 ראשים קוראים. בכל צעד פונקציית המעברים קובעת לאיזה מצב לעבור ולאיזה כיוון להניע כל אחד משלושת הראשים, בהתאם למצב הנוכחי ולשלושת התווים אותם קוראים שלושת הראשים. בתחילתו ובסופו של הקלט מוסיפים תו חדש $ והראשים הקוראים לא יכולים לעבור גבולות אלו. אם אחד הראשים הקוראים מנסה לנוע אל מעבר לגבולות התחומים ע"י ה-$ים, הוא נשאר באותו המקום.

הבעיה A_{3DFA} היא בעיית הקבלה עבור 3DFA, כלומר:

קלט: A 3DFA וקלט עבורו w.

שאלה: האם A מקבלת את w?

A_{3DFA} שייכת למחלקה (הנח ש- $P \neq NP$) :

א. P

ב. R \ P

ג. RE \ R

ד. אף אחת מהנ"ל

הבעיה כריעה כי מספר הקונפיגורציות האפשרי חסום וניתן לחשב את החסם. הבעיה ב-P כי מספר זה הוא פולינום של אורך הקלט.

שאלה 12

מגדירים קבוצה של מ"ט: $TM_{6,3} = \{M \mid M \text{ is a TM with 6 states and 3 tape symbols}\}$

(ב-6 המצבים נכללים המצבים q_a ו-q_r כך שיש בדיוק 4 נוספים, ב-3 תווי הסרט נכלל "רווח")

<u>טענה 1:</u> לכל $i \geq 1$ קיימת $M \in TM_{6,3}$ שריצתה על ε מסתיימת במקום ה-i על הסרט.

<u>טענה 2:</u> לכל $i \geq 1$ קיימת $M \in TM_{6,3}$ וקיים w כך שריצת M על w מסתיימת במקום ה-i על הסרט.

א. טענה 1 נכונה וטענה 2 לא נכונה.

ב. טענה 2 נכונה וטענה 1 לא נכונה.

ג. שתי הטענות נכונות.

ד. שתי הטענות אינן נכונות.

זו קבוצה סופית של מ"ט ולכן טענה 1 לא יכולה להיות נכונה. לעומת זאת, אין בעיה לבנות מ"ט עם 6 מצבים ו-3 תווים שעוצרת את הריצה בקצה הקלט, ולכן טענה 2 נכונה.

שאלה 13

בעיית ההכרעה SAT_{3DNF} היא הבעיה הבאה:

קלט: נוסחת 3DNF (מורכבת מדיסיונקטים שבהם ∧ של 3 ליטרלים, וביניהם ∨).

שאלה: האם קיימת הצבה מספקת לנוסחה?

למשל: עבור הקלט $(\neg x1 \wedge x2 \wedge \neg x3) \vee (x1 \wedge x3 \wedge x5) \vee (\neg x4 \wedge x2 \wedge x2)$ התשובה היא 'כן'.

הבעיה IP (integer linear programming), אי שוויונות לינאריים מעל השלמים) תוארה בשיעור.

מה מהבאים נכון (הנח ש- $P \neq NP$) ?

א. $SAT_{3DNF} \leq_p IP$

ב. $IP \leq_p SAT_{3DNF}$

ג. תשובות א' ו-ב' נכונות.

ד. אף תשובה אינה נכונה.

קל למצוא אלגוריתם פולינומיאלי לבעיה זו. IP לא טריוויאלית ולכן א' בהכרח נכונה. ב' אינה נכונה כי IP היא NP-קשה, ונתון כי $P \neq NP$.

שאלה 14

$L = \{ <M, w> \mid M \text{ is a TM with fewer than 100 states, and } M \text{ halts on } w \}$

לאיזה מהמחלקות הבאות שייכת L :

א. R

ב. RE \ R

ג. coRE \ R

ד. אף אחת מהתשובות א'-ג' אינה נכונה.

הבעיה לא כריעה כי יש מ"ט אוניברסאלית שמכילה פחות מ-100 מצבים, ואם בעיה זו הייתה כריעה היינו יכולים להכריע את בעיית העצירה ע"י שימוש במ"ט אוניברסאלית זו. לעומת זאת, קל להכריע למחצה בעיה זו.

<u>שאלה 15</u>

להלן בעיית ההכרעה PRINT_BLANK:

<u>קלט:</u> מ"ט M.

<u>שאלה:</u> האם לכל קלט x, M לא כותבת "רווח" על הסרט כאשר היא רצה על x ?

(הבהרה: גם כתיבת "רווח" בתא בו היה כתוב כבר "רווח" נחשבת ככתיבת "רווח".)

האם בעיה זו כריעה?

<u>תשובה (הקף):</u>

כן	/	לא

<u>הוכחה:</u>

נראה רדוקציה מהמשלים של Halt. בהינתן M,w נייצר M' שלכל קלט x מריצה את M על w ללא כתיבת רווח על הסרט. היא תשתמש בתו חדש (# למשל) במקום רווח – אם M התכוונה לכתוב רווח M' תכתוב #, וכאשר היא תקרא # היא תתייחס אליו בדיוק כמו לרווח. בנוסף, אם M עוצרת M' תכתוב רווח ותעצור.

<u>שאלה 16</u>

להלן בעיית ההכרעה SUBGRAPH_ISOMORPHISM:

<u>קלט:</u> שני גרפים (לא מכוונים) G_1 ו-G_2 (נתונים ע"י מטריצת שכנויות).

<u>שאלה:</u> האם G_2 מכיל תת גרף איזומורפי ל-G_1 ?

<u>תזכורות:</u>

א. תת גרף של גרף G – גרף שקודקודיו מהווים תת קבוצה של קודקודי G, והקשתות שלו הן כל הקשתות של G שמחברות בין קודקודים בתת קבוצה זו.

ב. גרף G נקרא איזומורפי לגרף H, אם G מתקבל ע"י תמורה (פרמוטציה) של רשימת הקודקודים של H.

נכון/לא נכון:

אם יש פיתרון פולינומיאלי ל-SUBGRAPH_ISOMORPHISM אז יש פיתרון פולינומיאלי ל-SAT.

(פיתרון פולינומיאלי = מ"ט שמכריעה את הבעיה בזמן פולינומיאלי ביחס לאורך הקלט)

<u>תשובה (הקף):</u>

נכון	/	לא נכון

<u>הוכחה:</u>

נראה שבעיה זו NP קשה ולכן הטענה בהכרח נכונה.

ע"י רדוקצית מיפוי פול" מ-CLIQUE: בהינתן גרף G ומספר k נחזיר G_1 קליק בגודל k ו-G_2 זהה ל-G.

שאלה 17

<u>הוכח או הפרך:</u> יש שפה חסרת הקשר ולא רגולרית מעל הא"ב $\{1\}$.

(מדובר בא"ב שמכיל תו יחיד 1)

<u>רמז:</u> נסה להראות ששפה כזו היא איחוד סופי של שפות מהצורה uv^* כאשר $u,v \in \{1\}^*$ בעזרת למת הניפוח.

<u>תשובה (הקף):</u>

הטענה נכונה	/	הטענה לא נכונה

<u>הוכחה:</u>

תהא L שפה חסרת הקשר מעל $\{1\}$. נוכיח שהיא בהכרח רגולרית.
לפי למת הניפוח קיים n כך שכל מילה $w\in L$, $|w|\ge n$, קיימת חלוקה $w=uvxyz$ כך ש-$|vxy|\le n$, $|vy|\ge 1$ ולכל $i\ge 0$ $uv^ixy^iz\in L$. כלומר, אם $|vy|=k$ ו-$|uxz|=m$ אז L מכילה את כל המילים 1^{m+ik} לכל $i\ge 0$. כלומר לכל מילה $w\in L$, $|w|\ge n$ מתאימה סדרה חשבונית $\{m+ik \mid i\ge 0\}$ שמכילה את $|w|$, כך שכל המילים שאורכן שייך לסדרה זו הן ב-L. קל להראות שכל קבוצת מילים כזו היא רגולרית. אם נראה שיש מספר סופי של קבוצות כאלו נסיים, כי L היא איחוד של קבוצות אלו (המכילות את כל המילים שאורכן $\ge n$) וקבוצת מילים סופית נוספת (כל המילים שאורכן $\le n$). אם ל-w מתאימה הסדרה החשבונית $\{m+ik \mid i\ge 0\}$ אז לפי תנאי למת הניפוח $1\le k\le n$. נניח שקיימת מילה אחרת w' שלה מתאימה הסדרה $\{m'+ik \mid i\ge 0\}$, כאשר $m=m'(\mathrm{mod}\ k)$, ונניח בלי הגבלת הכלליות ש-$m\le m'$. אז קיים $j\ge 0$ כך ש-$m'=m+jk$ ולכן לכל i, $m'+ik=m+(i+j)k$, כלומר כל הסדרה $\{m'+ik \mid i\ge 0\}$ מוכלת בסדרה $\{m+ik \mid i\ge 0\}$. לכן ניתן ע"י לכל היותר k סדרות חשבוניות לכל $1\le k\le n$ (כלומר סה"כ פחות מ-n^2 סדרות) לכסות את אורכי כל המילים באורך $\ge n$ ב-L.