מס' ת.ז.:__________________　　מס' מחברת:__________

מבחן מועד ב' במודלים חישוביים, סמסטר ב' 2007 - גרסה א'

בית הספר למדעי המחשב, אוניברסיטת תל-אביב

מרצה: פרופ' בני שור
מתרגלים: ריקי רוזן, יובל ענבר, אודי בוקר

20/9/07

הוראות

1. **קרא/י את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.**
2. משך הבחינה – **שלוש שעות.** חומר עזר מותר: **שני** דפי פוליו (דו צדדיים) בלבד.
3. יש לענות על השאלות הפתוחות במקום המיועד לכך בטופס השאלון (טופס זה) ועל השאלות הסגורות בטופס התשובות.
   מחברות הבחינה לא ייקראו, וישמשו כטיוטה בלבד.
4. יש למלא בכל דף של השאלון מספר ת.ז. ומספר מחברת.
5. יש למלא בטופס התשובות שם, ומספר ת.ז.
6. במבחן 2 שאלות "פתוחות" ו-10 שאלות "סגורות".
   א. בנוגע לשאלות הפתוחות:
   - הניקוד לכל סעיף מופיע בתחילת הסעיף.
   - יש לענות על השאלות במקום המיועד לכך בטופס השאלון, ולא מחוץ לו.
   - יש לענות תשובות ברורות ותמציתיות. תשובות מסורבלות יגררו הורדת נקודות.
   - לכל סעיף התשובה "**אינני יודע/ת**" מזכה ב-20% ממשקל הסעיף. במקרה זה **אין להוסיף** שום הסבר.

   ב. בנוגע לשאלות הסגורות:
   - לכל שאלה יש לסמן תשובה אחת בדף התשובות המצורף.
   - יש לזכור למלא שם, ת.ז. **ומספר גרסה** בדף התשובות המצורף.
   - הניקוד לכל שאלה הוא 5 נקודות.
7. יש לדאוג שהבודקים יוכלו לקרוא את התשובות ללא שימוש במיקרוסקופ, תוכנה לזיהוי תווים, או פניה לבעלת אוב.
8. כל המספרים המופיעים בהגדרות הם מספרים שלמים, אי שליליים, ונתונים בייצוג בינארי, אלא אם כן נאמר במפורש אחרת.
9. בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג, ניתן להסתפק ***בתיאור מילולי משכנע*** של אופן פעולת המכונה, ואין צורך להגדיר את פונקציית המעברים שלה, אלא אם הדבר התבקש במפורש.
10. מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתרגול, או בתרגיל בית) בתנאי שמצטטים אותה באופן מדוייק. טענות אחרות (כאלה שהוכחו בספר, בהרצאות מהסמסטר הקודם, בבחינות בטכניון מ-1989, וכו') יש להוכיח.
11. **בכל השאלות הניחו כי: $NP \neq coNP$ ו-$NP \neq P$, למעט אם נאמר אחרת.**

בהצלחה!

חלק א'

<u>שאלה 1</u> (25 נקודות)

א. (18 נקודות)
הוכיחו כי עבור גרף לא מכוון $G=(V,E)$ השפה הבאה היא NP שלמה:
$Clique_{2/3} = \{<G> \mid$ יש ב-G קליק בגודל $\geq 2|V|/3\}$

<u>הוכחה:</u>
ראשית יש להוכיח כי הבעיה ב- NP. העד היא קבוצת קודקודים בגודל $2/3|V|$ ובודקים האם יש קשת בין כל שני קודקודים.
כדי להראות קושי ב NP נראה רדוקציה מ 3SAT ל $Clique_{2/3}$.
הרדוקציה משתמשת ברדוקציה שראינו בכיתה מ 3SAT ל Clique (בהינתן נוסחת CNF בת n משתנים ו m פסוקיות בונים גרף עם 3m קודקודים, נסמנם ב- V כך שהנוסחה ספיקה אם"ם יש קליק בגודל m) כמו כן נוסיף קליק בגודל 3m, נסמן את קבוצת קודקודיו ב U ונחבר את כל קודקודיו לכל יתר הקודקודים, נסמן גרף זה ב 'G. (קודקודי 'G הם $U\cup V$).

קל לראות שהרדוקציה חשיבה ופולינומיאלית.

<u>נכונות:</u> נראה ש $\varphi\in 3SAT \Leftrightarrow G'\in Clique_{2/3}$
אם $\varphi\in 3SAT$ אז φ ספיקה. מנכונות הרדוקציה שראינו בכיתה נובע שיש קליק בגודל m מתוך קודקודי U ולפי בניה נקבל שיחד עם V הם יוצרים קליק בגודל 4m (מתוך 6m קודקודים) וסיימנו.

אם $\varphi\notin 3SAT$ אז φ אינה ספיקה ולכן הקליק המקסימאלי מתוך U הוא בגודל m-1 ולכן ב 'G הקליק המקסימאלי הוא בגודל $< 2/3|V|$.

מס' ת.ז.:____________________ מס' מחברת:__________

ב. (7 נקודות)

הוכיחו כי עבור גרף לא מכוון $G=(V,E)$ השפה הבאה היא NP **קשה**:

$MaxClique_{1/3} = \{<G> \mid$ הקליק המקסימלי ב-G הוא **בדיוק** בגודל $[|V|/3]\}$

כאשר $[x]$- ערך שלם של x (הקרוב ביותר)

<u>הוכחה:</u>

זו בדיוק הרדוקציה שראינו בכיתה מ 3SAT ל- CLIQUE. יש להסביר בכמה מילים את הרדוקציה.

<u>שאלה 2</u> (25 נקודות)

א. (15 נקודות)
הראו כי אין רדוקציית מיפוי מהשפה { M מכונת טיורינג ו- $L(M) = \Sigma^*$ | $L_{\Sigma^*} = \{<M>$
אל השפה { M מכונת טיורינג ו- $L(M) = \varnothing$ | $L_{\varnothing} = \{<M>$

<u>הוכחה:</u>

ראינו בכיתה ש $L_{\Sigma^*} \notin RE \cup coRE$ ונוכיח כי $L_{\varnothing} \in coRE$: נראה שיש מכונה שמקבלת את השפה המשלימה של $L_2 = (L_{\varnothing})^C$. בהינתן מכונה M נריץ את M בהרצה מבוקרת (שיטת האלכסון) על כל הקלטים ונקבל את M אם M קיבלה קלט כלשהו.
נכונות: אם $M \in L_2^C$ אז M מקבלת קלט כלשהו ולכן המכונה שבנינו תקבל את M. אם $M \notin L_2^C$ אז אין קלט ש M מקבלת ולכן המכונה שבנינו לא תעצור.

אם $L_{\Sigma^*} \leq L_{\varnothing}$ אז לפי משפט שלמדנו נקבל שגם $L_{\Sigma^*} \in coRE$ וסתירה.

ב. (10 נקודות)
הראו, **ללא שימוש במשפט רייס**, כי השפה $\{<M> \mid L(M)\in NP$ -ו מכונת טיורינג $M\}$ אינה כריעה.

<u>הוכחה:</u>

נסמן שפה זו ב- L. נראה רדוקציה מ H_{TM} ל- L ולפי משפט שלמדנו נקבל ש L אינה כריעה.
תהי M_H מכונה <u>שמקבלת</u> את HALT.
הרדוקציה: בהינתן M,x קלט ל H_{TM} הרדוקציה בונה את המכונה M' באופן הבא:
M': קלט: w
- הרץ את M על x ‏|w| צעדים. אם M עצרה בזמן זה החזר F
  אחרת אם w מהצורה M,y כלומר קידוד של מ"ט ולאחריו
  מילה אז הרץ את M_H על w והחזר את תשובתה.

<u>ברור שהרדוקציה חשיבה.</u>

נכונות: אם $<M,x>\in H_{TM}$ אז קיים n_0 כך ש M עוצרת על x תוך n_0 צעדים. לכן לכל w שמקיים $|w|\geq n_0$, M' תדחה את w לכן L(M') מכילה רק מילים באורך לכל היותר n-1 וזו קבוצה סופית ולכן השפה ב- NP. אם $<M,x>\notin H_{TM}$ אז M אינה עוצרת על x לכל w ולכן M' תקבל רק מילים שהן קידוד של מ"ט וקלט שהמכונה עוצרת עליו. הבעיה אינה חשיבה ולכן בפרט אינה ב- NP.

מס' ת.ז.:_________________ מס' מחברת:_________

חלק ב'

1. נגדיר את השפה $L=\{<G_1, G_2> \mid |L(G_1)| = |L(G_2)|$ ו- G_1, G_2 דקדוקים חסרי הקשר$\}$
השפה L שייכת ל:
   א. R
   ב. RE
   ג. coRE
   ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

To check whether a CFL is finite is in R. Also it simple to generate all words of a CFL if it is finite. Therefore L is in R!

2. נוסחה בוליאנית הינה בצורת DNF אם היא OR של פסוקיות, כאשר כל פסוקית הינה AND של ליטרלים. למשל הנוסחה הבאה הינה בצורת DNF:
$$(x_1 \wedge x_2 \wedge \overline{x_3} \wedge x_4) \vee (x_2 \wedge \overline{x_2} \wedge x_5) \vee (x_6 \wedge x_7 \wedge x_8 \wedge x_9)$$
נגדיר את השפה $\text{DNF-SAT} = \{\varphi \mid$ הינה נוסחה בוליאנית בצורת DNF שיש לה השמה מספקת $\varphi\}$
בהנחה ש- $P \neq NP \neq coNP$, אז
   א. DNF-SAT היא NP-שלמה.
   ב. DNF-SAT היא coNP-שלמה.
   ג. DNF-SAT נמצאת ב- NP\P.
   ד. DNF-SAT נמצאת ב-P.

It is trivial to check if a single clause is satisfiable. Just check if there is a literal that it complement is not in the clause. Since there is an "or" between the clauses we need to check if there is at least one satisfiable clause.

3. נגדיר את השפה $A = \{<G> \mid$ הינו גרף המכיל משולש (קליק בגודל 3) $G\}$
נתבונן בשפות הבאות:
$$L_1 = \{<M> \mid \varnothing \leq_p L(M)\}$$
$$L_2 = \{<M> \mid \Sigma^* \leq_p L(M)\}$$
$$L3 = \{<M> \mid A \leq_p L(M)\}$$
איזו מהטענות הבאות נכונה:
   א. $L_1 \in RE$, $L_2 \in RE$, $L_3 \notin RE \cup coRE$
   ב. $L_1 \in coRE$, $L_2 \in coRE$, $L_3 \in coRE$
   ג. $L_1 \notin RE \cup coRE$, $L_2 \in RE$, $L_3 \notin RE \cup coRE$
   ד. $L_1 \in coRE$, $L_2 \in coRE$, $L_3 \in RE$

L1 is equivalent to $\{<M> \mid L(M) \neq \Sigma^*\}$. L2 is equivalent to $\{<M> \mid L(M) \neq \varnothing\}$.
Since A is in P, L3 is equivalent to $\{<M> \mid L(M) \neq \varnothing$ and $L(M) \neq \Sigma^*\}$.

4. נגדיר את השפות הבאה: DominatingSet = {<G,k> |
G=(V,E) גרף לא מכוון המכיל קבוצת קודקודים $S \subseteq V$ בגודל k,
כך שכל קודקוד בגרף שייך ל-S ו/או מחובר בקשת לקודקוד השייך ל-S }
k ניתן בייצוג בינארי.

MaxClique= {<G,m > | G=(V,E) גרף לא מכוון |
המכיל קליק בגודל m, אך אינו מכיל קליק בגודל m+1}

תחת ההנחה ש-$NP \neq coNP$, איזו מהטענות הבאות נכונה:

א. $DominatingSet \leq_P IS$

ב. $MaxClique \leq_P DominatingSet$

ג. $H_{TM} \leq_P DominatingSet$

ד. אם $P \neq NP$ זו עדיין שאלה פתוחה אם $DominatingSet \in NP$

Since IS is NPC and DominateSet is NP.

5. נגדיר את השפה הבאה:

$SubCut=\{<U_1,U_2,\ldots,U_n,k,s> |$
Ui הינן קבוצות של מס' טבעיים, k,s-ו הינם מס' טבעיים חיוביים,
כך שיש k אינדקסים $i_1,\ldots,i_k$, כך שהחיתוך של $Ui_1,\ldots,Ui_k$ הינו קבוצה בגודל s לכל היותר.}
כל המספרים ניתנים בייצוג בינארי.

איזו מהטענות הבאות נכונה:

א. SubCut הינה ב-NP, וכן אם $P \neq NP$ אז SubCut נמצאת ב-NP\P.

ב. SubCut ב-P, גם אם $P \neq NP$.

ג. SubCut הינה NP-קשה, אך לא ב-NP.

ד. SubCut לא ב-coNP וכן לא ב-R.

There is an easy polynomial reduction from SetCover to SubCut (hint use S\Ui from input of cover-set as the U'i for SubCut and s=0 and the same k) therefore it is NPHard. It is easy to show a polynomial verifier, therefore it is in NP.

6. מהי השפה L(r) עבור הביטוי הרגולרי $r = [1 \cup 01^*0]^* \cup [0^* \cup 10^*1]^*$

א. כל המילים המכילות את הרצפים 010 או 101 וכן המילה הריקה

ב. כל המילים מעל $\Sigma=\{0,1\}$

ג. מילים המכילות מס' זוגי של 1ים או מס' זוגי של 0ים (אפס מוגדר כמס' זוגי)

ד. כל המילים המכילות את הרצפים 010 או 101 וכן המילה הריקה ומילים המכילות רק 0ים או רק 1ים

It is (the shortest) regular expression for words with either an even no. of 0s (the left component) or an even no. of 1s (the right component)

7. נגדיר את השפה $L = \{<M> |$ M מ"ט אשר לא עוברת את התא ה-100 בסרט (לכל קלט)$\}$
איזו מהטענות הבאות נכונה:

א. L כריעה

ב. L אינה כריעה לפי משפט רייס

ג. L אינה כריעה שכן $H_{TM} \leq_m L$

ד. L אינה כריעה שכן $H_{TM} \leq_m L^C$ (כלומר יש רדוקציה מ H_{TM} לשפה המשלימה של L).

For a given w it is clear that the problem is in R (bounded no. of configuration). We only need to check a bounded no of words (the input of the i-th cell for i>100 is irrelevant) therefore L is in R !!!

8. תהי $L=\{<D> | D \text{ is a DFA where } \Sigma=\{0,1\} \text{ s.t. } |L(D)| = |\Sigma^* \backslash L(D)|\}$
איזו מהטענות הבאות נכונה:

א. $L \in RE \backslash R$

ב. $L \in coRE \backslash R$

ג. $L \in R$

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

L(D) and its complement are both regular and therefore are also CFL. Now look at question 1 (in the close section of this exam)

9. נגדיר את השפה הבאה:
$L=\{<M,x,k> \mid$ M הינה מ"ט דטרמיניסטית העוצרת על x תוך k צעדים לכל היותר$\}$
המס' k ניתן בייצוג **בינארי**.
תחת ההנחה ש-$P \neq NP \neq coNP$, איזו מהטענות הבאות נכונה:

א. L שייכת ל-P.

ב. L הינה NP-קשה.

ג. L שייכת ל- $NP \cap coNP$

ד. אף אחת מהתשובות הקודמות אינה נכונה.

We can give the machine that solve SAT (exponentially) by trying all assignments of x (a CNF statement) k is 2^n where n is the number of variables.

The machine stops only if it finds a satisfying assignment. COMPLETE YOURSELF THE REDUCTION FROM SAT.

10. עבור מחרוזת w מעל ה-א"ב $\{0,1\}$ נסמן ב-$[w]$ את הערך המספרי של w בייצוג בינארי (למשל $[0101]=5$).
תהי $L_1=\{x\#y \mid x,y\in \{0,1\}^*, [x]>[y]\}$
תהי L_2 שפה רגולרית כלשהי מעל ה-א"ב $\{0,1,\#\}$
תהי $L_3 = L_1 \cap L_2$.
איזו מהטענות הבאות נכונה:

א. L_3 בהכרח רגולרית.

ב. L_3 בהכרח לא רגולרית ובהכרח חסרת הקשר.

ג. יש L_2 עבורה L_3 אינה חסרת הקשר.

ד. בהנחה ש- $P\neq NP$ אז $L_3 \notin R$.

L1 is not CFL we can take L2 as Σ^* and then L3=L1 …