

## מבחן במודלים חישוביים

סמסטר ב' התש"ע, מועד א'

תאריך: 4.7.2010

מרצים: פרופ' רונית רובינפלד, פרופ' בני שור

מתרגלים: יהונתן ברנט, רני הוד

מומליץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.

- משך הבחינה שעתיים ו-45 דקות.
- חומר עזר מותר: שני דפי A4, כתובים משני הצדדים.
- בראש כל עמוד בטופס המבחן יש למלא מספר ת"ז ומספר מחברת; בטופס התשובות יש למלא מספר ת"ז, מספר גירסא ומספר מחברת.
- במבחן שני חלקים. בחלק הראשון שלוש שאלות פתוחות (20 + 17 + 18 ובסה"כ 55 נק') ובחלק השני 9 שאלות סגורות (5 נק' כל אחת). כדי לקבל ציון 100 בבחינה יש לענות נכונה על כל השאלות.
- תשובות לשאלות הסגורות יש לסמן במקום המתאים לכך בטופס התשובות. בכל שאלה יש לסמן תשובה יחידה.
- על התשובה לכל שאלה פתוחה להופיע במסגרת המתאימה בטופס המבחן (טופס זה). יש לענות תשובות ברורות ותמציתיות. תשובות מסורבלות או לא ניתנות פיזית לקריאה יזכו לניקוד חלקי בלבד.
- ודא' היטב את תשובתך לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף חלק א' מצורפת מסגרת לשימוש במקרי "חירום".
- מחברת הבחינה משמשת כטיוטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- על סעיף של שאלה פתוחה ניתן לענות "אינני יודע/ת" כתשובה; על סעיף זה יינתנו 20% מהנקודות (מעוגל למעלה). במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתירגול או בתרגיל הבית) בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק. טענות שהוכחו במקום אחר (כגון: בספר הלימוד, בויקיפדיה, ב-MIT, בסמסטר קודם) יש להוכיח מחדש.
- אלא אם נאמר אחרת במפורש, כל המספרים המופיעים בשאלות הם שלמים, אי-שליליים ונתונים בייצוג בינארי.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה. אין צורך להגדיר במדויק את פונקצית המעברים  $\delta$  אלא אם השאלה מבקשת זאת במפורש.
- בכל השאלות ניתן להניח כי  $\mathcal{NP} \neq \text{co-}\mathcal{NP}$  ו- $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$  אלא אם השאלה מציינת אחרת.

בהצלחה!

	א1		ב1	
	2			
	א3		ב3	ג3

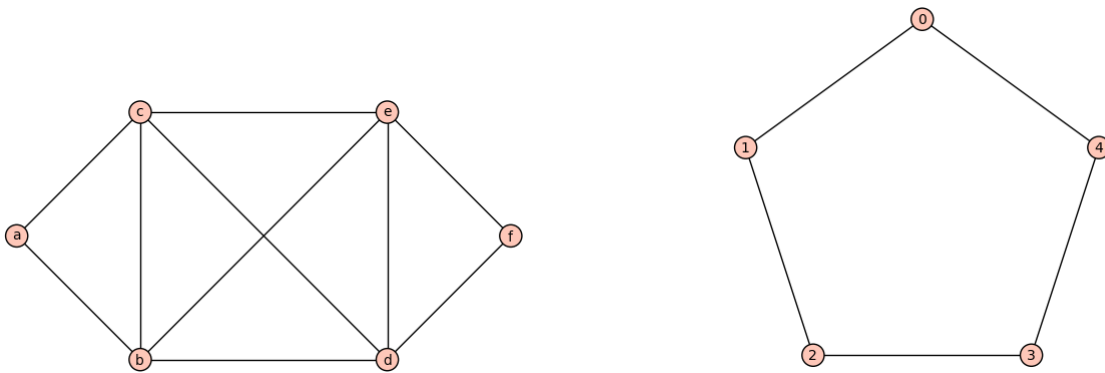
## חלק I

### שאלה 1 (20 נק')

הגדרה: יהיו  $G, H$  זוג גרפים לא מכוונים.

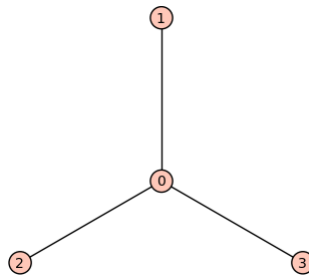
- נאמר ש- $H$  הוא תת-גרף של  $G$  אם יש פונקציה חח"ע  $f : V(H) \rightarrow V(G)$  כך שמתקיים  $(u, v) \in E(H)$  אם  $(f(u), f(v)) \in E(G)$ .
- נאמר ש- $H$  הוא תת-גרף מושרה של  $G$  אם יש פונקציה חח"ע  $f : V(H) \rightarrow V(G)$  כך שמתקיים  $(u, v) \in E(H)$  אם  $(f(u), f(v)) \in E(G)$ .

דוגמא: הגרף  $H$  באיור הבא הוא תת-גרף של  $G$  (ע"י הפונקציה  $0 \mapsto a, 1 \mapsto b, 2 \mapsto d, 3 \mapsto e, 4 \mapsto c$  למשל) אולם אינו תת-גרף מושרה של  $G$  (כי כל בחירה של חמישה צמתים ב- $G$  משרה לפחות שש קשתות, וב- $H$  יש רק חמש).



איור 1: מימין הגרף  $H$  ומשמאל הגרף  $G$ .

הגדרה: גרף המורכב מצומת מרכזי המחובר ל- $k$  צמתים אחרים נקרא  $k$ -כוכב (פרט ל- $k+1$  צמתים ו- $k$  קשתות אלה אין בגרף עוד צמתים או קשתות).



איור 2: 3-כוכב.

עבור כל אחת מבעיות ההכרעה הבאות, קבע/י האם היא ב- $\mathcal{P}$  או שהיא  $\mathcal{NP}$ -קשה. הוכח/הוכיחי את קביעתך.

**סעיף א' (10 נק')**

בהנתן גרף  $G$  ומספר טבעי  $k$ , האם יש ל- $G$  תתי-גרף שהוא  $k$ -כוכב?

הוכחה:

**סעיף ב' (10 נק')**

בהנתן גרף  $G$  ומספר טבעי  $k$ , האם יש ל- $G$  תתי-גרף מושרה שהוא  $k$ -כוכב?

הוכחה:

**שאלה 2 (17 נק')**

נסמן  $S_n = \{\langle M \rangle : M \text{ has } n \text{ states and halts on } \epsilon\}$  ונגדיר את הפונקציה  $BB : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}$  כך:  
 $BB(n)$  הוא המספר המקסימלי של צעדים שמבצעת מכונה מתוך  $S_n$  בריצה על הקלט  $\epsilon$ .

נשים לב שהפונקציה  $BB$  מוגדרת היטב לכל  $n \geq 1$  כיוון ש- $S_n$  סופית, לא ריקה, וכל מ"ט בה מבצעת מספר צעדים סופי בריצתה על  $\epsilon$ .

הוכח/הוכיחי את הטענה הבאה בצורה ישירה:<sup>1</sup>

• אם  $BB$  פונקציה חשיבה אז השפה  $H_\epsilon = \{\langle M \rangle : M \text{ halts on } \epsilon\}$  כריעה.

הוכחה:

<sup>1</sup>במילים אחרות, אל תחזרו על ההוכחה שראינו בכיתה לכך ש- $BB$  אינה חשיבה.

**שאלה 3 (18 נק')**

לכל אחד מההיגדים הבאים, קבע/י האם הוא אמת או שקר. הסבר/הסבירי בקצרה.

**סעיף א' (6 נק')**

אם שפות  $A$  ו- $B$  מעל  $\Sigma$  מקיימות  $A \leq_m B$  ו- $A \leq_p B$  אזי  $A \leq_p B$ .  
(כפי שצוין בדרך הראשון, ניתן להניח כאן כי  $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ )

תשובה (יש להקיף בעיגול): אמת/שקר

נימוק:

**סעיף ב' (6 נק')**

אם שפות  $A$  ו- $B$  מעל  $\Sigma$  מקיימות  $A \leq_m B$  ו- $A \leq_m B$  אזי  $|A| = |B|$ .

תשובה (יש להקיף בעיגול): אמת/שקר

נימוק:

**סעיף ג' (6 נק')**

המחלקה  $NPC$  סגורה תחת פעולת חיתוך.

תשובה (יש להקיף בעיגול): אמת/שקר

נימוק:

מסגרת "חירום" לשאלה פתוחה מספר \_\_\_\_\_, סעיף \_\_\_\_\_:

## חלק II

1. תהינה  $A$  ו- $B$  שפות חסרות הקשר ונתון שהאיחוד  $A \cup B$  אינו ניתן לקבלה ע"י PDA דטרמיניסטי. איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

- (א) יתכן שגם  $A$  וגם  $B$  מתקבלות ע"י PDA דטרמיניסטיים.  
 (ב) לפחות אחת מבין  $A$  ו- $B$  אינה מתקבלת ע"י PDA דטרמיניסטי (אך יתכן שאחת מהן כן).  
 (ג) בהכרח אף לא אחת מבין  $A$  ו- $B$  ניתנת לקבלה ע"י PDA דטרמיניסטי.  
 (ד) בהכרח  $A$  ו- $B$  שפות חסרות הקשר רבי-משמעיות (קרי, לא קיים עבורן דקדוק ח"ה חד-משמעי).

2. לאיזו מחלקה שייכת השפה האונארית  $U_{\text{prime}} = \{1^p : p \text{ is a prime number}\}$ ?

(א)  $U_{\text{prime}} \in \mathcal{P}$

(ב)  $U_{\text{prime}} \in (\mathcal{NP} \cup \text{co-}\mathcal{NP}) \setminus \mathcal{P}$

(ג)  $U_{\text{prime}} \in \mathcal{NPC}$

(ד)  $U_{\text{prime}} \notin \mathcal{R}$

3. תהינה  $A, B$  שפות לא טריוויאליות מעל א"ב  $\Sigma$  (קרי: לא  $\emptyset$  ולא  $\Sigma^*$ ). איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

- (א) קיימת שפה  $C$  כך ש- $A \leq_p C$  ו- $B \leq_p C$ .  
 (ב) קיימת שפה  $C$  כך ש- $A \leq_p C$  ו- $B \leq_p C$ .  
 (ג) קיימת שפה  $C \notin \mathcal{NP}$  כך ש- $A \leq_p C$  ו- $B \leq_p C$ .  
 (ד) לכל שפה  $C$  מתקיים  $A \leq_m C$  ו- $B \leq_m C$ .

4. נגדיר  $L = \{\langle M \rangle : |\langle M \rangle| \text{ is an even number}\}$ . נזכיר שכדי להשתמש במשפט Rice עלינו לבדוק שהשפה היא סמנטית ולא טריוויאלית. מדוע לא ניתן להפעיל את משפט Rice על השפה  $L$ ?

- (א) השפה  $L$  היא טריוויאלית.  
 (ב) השפה  $L$  אינה סמנטית.  
 (ג) השפה  $L$  היא טריוויאלית ולא סמנטית.  
 (ד) למעשה, משפט Rice תקף עבור השפה  $L$ .

5. בהנתן השמה מסוימת עבור נוסחת CNF  $\phi$ , נאמר שהיא Maj-מספקת אותה אם בכל פסוקית של  $\phi$  יותר ממחצית מהליטרלים קיבלו ערך אמת. נגדיר את Majority-SAT כשפת כל נוסחות ה-CNF עבורן קיימת השמה Maj-מספקת. איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

- (א) Majority-SAT היא ב- $\mathcal{P}$ .  
 (ב) Majority-SAT היא ב- $\mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP}$  אך אינה ב- $\mathcal{P}$ .  
 (ג) Majority-SAT היא ב- $\mathcal{NPC}$ .  
 (ד) Majority-SAT אינה ב- $\mathcal{NP}$  אבל היא  $\mathcal{NP}$ -קשה.

6. יהי  $G$  דקדוק ח"ה ויהיו  $R, S$  ביטויים רגולריים. לאיזו מחלקה שייכת השפה

$$\{ \langle G, R, S \rangle : L(G) \cap L(R) = L(S) \}$$

(א)  $\mathcal{R}$ .

(ב)  $\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$ .

(ג)  $\text{co-}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$ .

(ד) התשובות א'-ג' לעיל אינן נכונות.

7. נגדיר  $k$ -PDA כאוטומט לא דטרמיניסטי בעל  $k$  מחסניות שבו בכל צעד ניתן להכניס, להוציא או להותיר כל אחת מהמחסניות ללא שינוי (אפשר למשל להוציא  $a$  מאחת ולהכניס  $b$  לשניה). נגדיר את  $\mathcal{C}_k$  להיות מחלקת השפות המתקבלת ע"י  $k$ -PDA. איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) קיים  $k$  עבורו  $\mathcal{C}_k \neq \mathcal{C}_{k-1}$  וכן מתקיים  $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_m$  לכל  $m > k$ .

(ב) קיים  $k$  עבורו  $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_{k-1}$  וכן מתקיים  $\mathcal{C}_k \neq \mathcal{C}_m$  לכל  $m > k$ .

(ג) לכל  $k$  מתקיים  $\mathcal{C}_k \neq \mathcal{C}_{k-1}$ .

(ד) לכל  $k$  מתקיים  $\mathcal{C}_k = \mathcal{C}_{k-1}$ .

8. עבור מ"ט  $M$  נסמן  $H(M) = \{x \in \Sigma^* : M \text{ halts on } x\}$  איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) אם  $H(M) \in \mathcal{R}$  אז  $L(M) \in \mathcal{R}$ .

(ב) אם  $L(M) \in \mathcal{R}$  אז  $H(M) \in \mathcal{R}$ .

(ג) לכל מ"ט  $M$ ,  $H(M) \notin \mathcal{R}$ .

(ד) התשובות א'-ג' לעיל אינן נכונות.

9. נאמר שנוסחת CNF היא ארוכה אם היא מכילה לפחות  $2^{n/2}$  פסוקיות (clauses), כאשר  $n$  הוא מספר המשתנים שלה. נסמן  $\text{Long-SAT} = \{ \phi : \phi \text{ is a satisfiable long CNF formula} \}$ . איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) Long-SAT היא  $\mathcal{RE}$ -שלמה.

(ב) Long-SAT היא  $\mathcal{NP}$ -שלמה.

(ג) Long-SAT היא ב- $\mathcal{RE} \setminus \mathcal{NP}$ .

(ד) Long-SAT היא ב- $\mathcal{P}$ .

---

<sup>2</sup>זכורגיל  $L(M) = \{x \in \Sigma^* : M \text{ accepts } x\}$ .