

מבחן במודלים חישוביים

סמסטר ב' התשס"ט, מועד ב'

תאריך: 1.9.2009

מרצים: ד"ר מירי פרייזלר, פרופ' בני שור

מתרגלים: יהונתן ברנט, רני הוד

מומלץ לקרוא את כל ההנחיות והשאלות בתחילת המבחן, לפני תחילת כתיבת התשובות.

- משך הבחינה שעתיים ר-45 דקות.
- חומר עזר מותר: שני דפי A4, כתובים משני הצדדים.
- בראש כל עמוד בטופס המבחן יש למלא מספר ת"ז ומספר מחברת; בטופס התשובות יש למלא מספר ת"ז, מספר גירסא ומספר מחברת.
- במבחן שני חלקים. בחלק הראשון שתי שאלות פתוחות (30 נק' כל אחת) ובחלק השני 8 שאלות סגורות (5 נק' כל אחת). כדי לקבל ציון 100 בבחינה יש לענות נכונה על כל השאלות.
- תשובות לשאלות הסגורות יש לסמן במקום המתאים לכך בטופס התשובות. בכל שאלה יש לסמן תשובה יחידה.
- על התשובה לכל שאלה פתוחה להופיע במסגרת המתאימה בטופס המבחן (טופס זה). יש לענות תשובות ברורות ותמציתיות. תשובות מסורבלות או לא ניתנות פיזית לקריאה יזכו לניקוד חלקי בלבד.
- ודא/י היטב את תשובתך לפני כתיבתה בטופס המבחן. בסוף הטופס מצורפת מסגרת לשימוש במקרי "חירום".
- מחברת הבחינה משמשת כטיטא בלבד ולא תיבדק, אך יש להגישה עם המבחן.
- על סעיף של שאלה פתוחה ניתן לענות "אינני יודע/ת" כתשובה; על סעיף זה יינתנו 20% מהנקודות. במקרה זה אין להוסיף שום הסבר.
- מותר להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה (בהרצאה, בתירגול או בתרגיל הבית) בתנאי שמצטטים אותה באופן מדויק. טענות שהוכחו במקום אחר (כגון: בספר הלימוד, בויקיפדיה, ב-MIT, בסמסטר קודם) יש להוכיח מחדש.
- אלא אם נאמר אחרת במפורש, כל המספרים המופיעים בשאלות הם שלמים, אי-שליליים ונתונים בייצוג בינארי.
- בשאלות בהן יש לתאר מכונת טיורינג ניתן להסתפק בתיאור מילולי משכנע של אופן פעולת המכונה. אין צורך להגדיר במדויק את פונקצית המעברים δ אלא אם השאלה מבקשת זאת במפורש.
- בכל השאלות ניתן להניח כי $\mathcal{P} \neq \text{co-NP}$ ו- $\mathcal{NP} \neq \text{co-NP}$ אלא אם השאלה מציינת אחרת.

בהצלחה!

	ג1		ב1		א1
	ג2		ב2		א2

חלק I

שאלה 1

נתונה שפה $L \subseteq \Sigma^*$.

סעיף א' (10 נק')

הוכח/הוכיחי כי אם $L \in \mathcal{R}$ ו- $L \neq \emptyset, \Sigma^*$ אזי $\bar{L} \leq_m L$.

הוכחה:

סעיף ב' (10 נק')

הוכח/הוכיחי כי אם $L \notin \mathcal{R}$ ו- $L \leq_m \bar{L}$ אזי $L \notin \mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}$.

הוכחה:

סעיף ג' (10 נק')

תהיה שפה $A \in \mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$ מעל $\Sigma = \{0, 1\}$ ונגדיר $B = \{0w : w \in A\} \cup \{1w : w \notin A\}$.
 הוכח/הוכיחי $B \notin \mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}$ בהסתמך על סעיף ב' לעיל (גם אם לא פתרת אותו).
הערה: הוכחות שלא ישתמשו בסעיף ב' יזכו בניקוד חלקי (5 נק' לכל היותר).

הוכחה:

שאלה 2

עבור נוסחת CNF או DNF בוליאנית ϕ והצבה v למשתניה נגדיר את $N(\phi, v)$ כמספר הפסוקיות (clauses) המסופקות ע"י הצבה זו.

תזכורת: נוסחת CNF היא AND של פסוקיות וכל פסוקית היא OR של ליטרלים; נוסחת DNF היא OR של פסוקיות וכל פסוקית היא AND של ליטרלים.

נגדיר את השפות הבאות (שימו לב שהמספר הטבעי k נתון בייצוג בינארי):

COUNT-CNF = $\{\langle \phi, k \rangle : \phi \text{ is a CNF formula and there exists } v \text{ such that } N(\phi, v) = k\}$

COUNT-DNF = $\{\langle \phi, k \rangle : \phi \text{ is a DNF formula and there exists } v \text{ such that } N(\phi, v) = k\}$

סעיף א' (10 נק')

הוכח/הוכיחי כי $\text{COUNT-CNF} \leq_p \text{3-SAT}$. האם מכך נובע כי COUNT-CNF היא \mathcal{NP} -שלמה?

הוכחה:

סעיף ב' (10 נק')

הוכח/הוכיחי כי $3\text{-SAT} \leq_p \text{COUNT-CNF}$.

הוכחה:

סעיף ג' (10 נק')

הוכח/הוכיחי כי $\text{COUNT-CNF} \leq_p \text{COUNT-DNF}$.

הוכחה:

חלק II

1. תהי u פונקציה המוגדרת באופן הבא: הקלט הוא שלשה $(\langle M \rangle, x, 1^k)$ כאשר $\langle M \rangle$ הוא קידוד של מ"ט דטרמיניסטית חד-סרטית בעלת א"ב קלט $\Sigma = \{0, 1\}$ וא"ב מכונה $\Gamma = \{0, 1, 2, \$, \sqcup\}$, $x \in \Sigma^*$ היא מילה ו- 1^k הוא קידוד אונארי של המספר הטבעי $k \in \mathbb{N}$. הפלט של u הוא 1 אם M מקבלת את x תוך לכל היותר k צעדים ו-0 אחרת. איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) הפונקציה u אינה ניתנת לחישוב.

(ב) הפונקציה u ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.

(ג) הפונקציה u ניתנת לחישוב אך לא בזמן פולינומיאלי.

(ד) התשובות א'-ג' לעיל אינן נכונות.

2. עבור שפה $L \subseteq \Sigma^*$ נגדיר $sub(L) = \{y \in \Sigma^* : \exists x, z \in \Sigma^* \quad xyz \in L\}$. במילים אחרות, $sub(L)$ מכילה את כל תתי-המחרוזות הרצופות של מילות L . איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) אם השפה L רגולרית אזי גם $sub(L)$ רגולרית; כמו כן, אם $L \in \mathcal{RE}$ אזי גם $sub(L) \in \mathcal{RE}$.

(ב) אם השפה L רגולרית אזי גם $sub(L)$ רגולרית; לעומת זאת, קיימת שפה $L \in \mathcal{RE}$ עבורה $sub(L) \notin \mathcal{RE}$.

(ג) יש שפה L רגולרית עבורה $sub(L)$ אינה רגולרית; לעומת זאת, אם $L \in \mathcal{RE}$ אזי גם $sub(L) \in \mathcal{RE}$.

(ד) יש שפה L רגולרית עבורה $sub(L)$ אינה רגולרית; כמו כן, קיימת שפה $L \in \mathcal{RE}$ עבורה $sub(L) \notin \mathcal{RE}$.

3. נתונה שפה $L \subseteq \Sigma^*$ ונתון אלגוריתם (enumerator) המדפיס את רשימת כל המילים בשפה L (כל מילה בשפה מודפסת בדיוק פעם אחת).¹ נתון שלכל שתי מילים בשפה $x, y \in L$ עבורן $|x| < |y|$, המילה x מודפסת אחרי המילה y (אבל לאו דוקא מיד אחריה). מה ניתן לומר אודות L ?

(א) השפה L היא תמיד רגולרית.

(ב) השפה L היא תמיד חסרת הקשר ולעיתים אינה רגולרית.

(ג) השפה L היא תמיד כריעה ולעיתים אינה חסרת הקשר.

(ד) לעיתים השפה L אינה כריעה.

4. נגדיר $L = \{\langle M \rangle : M \text{ is a TM, } L(M) \text{ is finite and } |L(M)| \text{ is a multiple of 7}\}$. איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) $L \in \mathcal{R}$

(ב) $L \in \mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$

(ג) $L \in \text{co-}\mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$

(ד) $L \notin \mathcal{RE} \cup \text{co-}\mathcal{RE}$

¹האלגוריתם אינו מקבל קלט ואינו חייב לעצור. במהלך פעולתו הוא מדפיס מילים המופרדות זו מזו ע"י סימן רווח. מילים שאינן בשפה לא מודפסות.

5. נתונות שלוש השפות הבאות מעל הא"ב $\Sigma = \{a, b\}$:

$$L_1 = \{(ab)^k a (ba)^k : k \in \mathbb{N}\},$$

$$L_2 = \{(ab)^k b (ba)^k : k \in \mathbb{N}\},$$

$$L_3 = \{(ab)^k (ba)^k (ab)^k : k \in \mathbb{N}\}.$$

איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

- (א) כל השפות הן חסרות הקשר ואינן רגולריות.
 (ב) שתיים מהשפות הן חסרות הקשר ואינן רגולריות והשפה הנותרת אינה חסרת הקשר.
 (ג) אחת מהשפות היא רגולרית, אחת חסרת הקשר ואינה רגולרית והשפה הנותרת אינה חסרת הקשר.
 (ד) שתיים מהשפות הן רגולריות ואחת חסרת הקשר ואינה רגולרית.
6. נאמר שנוסחא בוליאנית ϕ היא טאוטולוגיה אם כל השמה בוליאנית למשתני ϕ תתן ערך אמת. תהי $T = \{\phi : \phi \text{ is a CNF formula and } \phi \text{ is a tautology}\}$. מהי מחלקת הסיבוכיות הקטנה ביותר (ביחס להכלה) אליה שייכת T ?

(א) \mathcal{P} .

(ב) $\mathcal{NP} \cap \text{co-}\mathcal{NP}$.

(ג) \mathcal{NPC} .

(ד) $\text{co-}\mathcal{NPC}$.

7. נניח כי $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$. איזו מהאפשרויות הבאות מתקיימת?

(א) $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{NPC}$.

(ב) $\mathcal{P} = \mathcal{NPC}$.

(ג) $\mathcal{P} \supsetneq \mathcal{NPC}$.

(ד) התשובות א'-ג' לעיל אינן נכונות.

8. תהי \mathcal{C} מחלקת שפות כלשהי ותהיינה A, B שפות. ידוע ש- $B \in \mathcal{C}$ וכן שיש רדוקציה מיפוי מ- A ל- B . באיזה מהמקרים הבאים לא בהכרח מתקיים $A \in \mathcal{C}$?

(א) $\mathcal{C} = \mathcal{RE} \cap \text{co-}\mathcal{RE}$ והרדוקציה היא חשיבה.

(ב) $\mathcal{C} = \mathcal{RE} \cap \text{co-}\mathcal{RE}$ והרדוקציה היא חשיבה בזמן פולינומי.

(ג) $\mathcal{C} = \mathcal{RE} \setminus \mathcal{R}$ והרדוקציה היא חשיבה בזמן פולינומי.

(ד) $\mathcal{C} = \mathcal{P}$ והרדוקציה היא חשיבה בזמן פולינומי.

מסגרת "חירום" לשאלה פתוחה מספר _____, סעיף _____:

מסגרת "חירום" לשאלה פתוחה מספר _____, סעיף _____: